第27卷 第2期　　　　工 程 数 学 学 报　　　　Vol. 27 No. 2
2010年04月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0258-13

求解非定常Navier-Stokes方程的自适应变分多尺度方法*

穆保英， 侯延仁， 张运章

(西安交通大学理学院，西安 710049)

摘　要: 本文基于变分多尺度方法提出了非定常Navier-Stokes方程的一种稳定化方法，并利用一个与实际误差等价的后验误差估计子，结合自适应算法，得到了非定常Navier-Stokes方程的自适应变分多尺度稳定化方法。该方法简单、直观，且易于程序实现。数值算例验证了该方法的有效性。

关键词: Navier-Stokes方程；变分多尺度方法；后验误差估计子；自适应算法

分类号: **AMS**(2000) 65M50; 65M60; 76D05　　**中图分类号**: O241.82　　**文献标识码**: A

1　引言

有限元方法是Courant于1943年首先提出。二十世纪60年代，有限元方法的应用范围扩展到了结构力学以外的领域，并建立了严格的数学理论基础，创立了相应的商业软件包。直到现在，有限元方法已经形成了比较完备的理论体系，成为工程中应用最为广泛的数值方法。在采用有限元方法求解具体问题时，其网格剖分的如何对计算结果的精度起着决定性的作用。正因为如此，近年来出现了基于有效误差估计的自适应有限元方法。

自适应有限元方法的思想最早出现在1978年，美国数学家Babuska等针对线性椭圆问题在文献[1]中提出了一种数学上严格的基于残值的误差估计技术，给出了误差的界限，并用局部误差指标定义了最优网格。80年代以后，自适应有限元方法方面的研究成果很多[2-8]，发展极为迅速。目前，自适应有限元方法有h-加密方法、p-改进方法、移动结点法、h-p法、r-p法等。

本文基于文献[7]中的变分多尺度方法的基础上，考虑由非泡函数扩充的分片线性有限元空间，取线性有限元为粗尺度，非泡函数为细尺度，从而提出了Navier-Stoke方程的一种稳定化方法。此外，结合文献[5]中Berrone提出的自适应算法，我们给出了两个后验误差估计子，并理论证明了其与实际误差的等价性。

本文内容安排如下：第二部分概括介绍了非定常Navier-Stokes方程的标准有限元解法；第三部分介绍了非定常Navier-Stokes方程的变分多尺度方法及其稳定性；第四部分与第五部分介绍了自适应算法以及后验误差估计子与实际误差的等价关系；第六部分给出了经典的方腔流实验算例，从而说明了本文方法的有效性。

收稿日期: 2009-12-21.　**作者简介**: 穆保英(1984年11月生)，女，硕士生．研究方向：偏微分方程近代数值解.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10871156)；西安交通大学交叉学科项目基金(2009xjtujc30).

2 非定常 Navier-Stokes 方程的标准有限元解法

考虑非定常 Navier-Stokes 方程

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, && (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
&\nabla\cdot u = 0, && (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
&u = 0, && (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
&u(\cdot,0) = 0, && x\in\Omega,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

这里 $\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$，$\Omega$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界凸多边形区域，其边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschtiz 连续的，粘性系数 $\nu > 0$，时间 $T > 0$，令速度 $u = (u_1(x,t), u_2(x,t))$，压力 $p = p(x,t)$，外力 $f = f(x,t) \in C^0(0,T;[L^2(\Omega)]^2)$。

首先，我们定义

$$
H_0^1(\Omega) = \left\{ v\in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},\quad L_0^2(\Omega) = \left\{ q\in L^2(\Omega) : \int_\Omega q = 0 \right\}
$$

以及 $V = [H_0^1(\Omega)]^2$，$Q = L_0^2(\Omega)$。记 $(\cdot,)$，$\|\cdot\|$ 分别为空间 $[L^2(\Omega)]^d$，$d = 1,2$ 上的 L^2-矢量积与 L^2-范数，$|\cdot|_1$ 与 $|\cdot|_2$ 分别为空间 V 上的 H^1 半范与 H^2 半范。为了得到原问题 (1) 的标准有限元解法，我们把时间 $(0,T)$ 分成 N 个时间段，每个时间段记为 (t^{n-1},t^n)，其步长为 $\tau^n = t^n - t^{n-1}$，$1\le n\le N$，其中 $0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = T$。为方便起见，记 $u^n = u(\cdot,t^n)$，$p^n = p(\cdot,t^n)$，$f^n = f(\cdot,t^n)$。我们在 $V\times V\times V$ 上定义三线性项

$$
b(u,v,w) = \frac{1}{2}\big((u\cdot\nabla)v, w\big) - \frac{1}{2}\big((u\cdot\nabla)w, v\big),
$$

且易知 b 有下列重要性质[9]

$$
\begin{aligned}
&b(u,v,w) = -b(u,w,v),\quad \forall\, u,v,w\in V,\\
&|b(u,v,w)| + |b(v,u,w)| + |b(w,u,v)| \le c|u|_1|v|_2\|w\|,\\
&\qquad \forall\, u\in V,\quad v\in D(A) = [H^2(\Omega)]^2\cap V,\quad w\in[L^2(\Omega)]^2,
\end{aligned}
$$

那么原问题 (1) 的变分形式为，求 $(u^n,p^n)\in V\times Q$，对任意的 $(v,q)\in V\times Q$ 有

$$
\begin{aligned}
B_0\big([u^n,p^n],[v,q]\big) &= (\nu\nabla u^n,\nabla v) - (p^n,\nabla\cdot v) + (q,\nabla\cdot u^n)\\
&= (f^n, v) - (\partial_t u|_{t=t^n}, v) - b(u^n,u^n,v),
\end{aligned}
$$

且 $B_0([u^n,p^n],[v,q])$ 满足：存在一常数 β，对任意的 $(u^n,p^n)\in V\times Q$ 有

$$
0 < \beta\big(|u^n|_1 + \|p^n\|\big) \le \sup_{(v,q)\in V\times Q}\frac{B_0\big([u^n,p^n],[v,q]\big)}{|v|_1+\|q\|}. \tag{2}
$$

我们设 $\{T_h^n\}_h$ 是第 n 个时间段区域 Ω 的标准有限元剖分，其所有内边界组成的集合记为 ε_h^n，定义如下的有限元空间

$$
\begin{aligned}
V_h^n &= \left\{ v_h^n\in V\bigcap[C^0(\overline{\Omega})]^2 : v_h^n|_K\in[P^m(K)]^2,\ \forall\, K\in T_h^n \right\},\\
Q_h^n &= \left\{ q_h^n\in Q\bigcap C^0(\overline{\Omega}) : q_h^n|_K\in P^l(K),\ \forall\, K\in T_h^n \right\},
\end{aligned}
$$

其中 $P^i(K)$ 是次数 $i \geq 1$ 的多项式构成的空间，记

$$h_K = \mathrm{diam}\{K : K \in T_h^n\}, \quad h = \max(h_K), \quad h_E = \{|E| : E \in \varepsilon_h^n\}.$$

于是，我们得到了原问题 (1) 的全离散变分形式，对任意的 $n = 1, \cdots, N$, $(v_h, q_h) \in V_h^n \times Q_h^n$，求 $(u_h^n, p_h^n) \in V_h^n \times Q_h^n$ 使得

$$\begin{aligned} & B_1\big([u_h^n, p_h^n], [v_h, q_h] \big) + b(u_h^n, u_h^{n-1}, v_h) + b(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, v_h) \\ = \; & (f^n, v_h) + b(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, v_h), \end{aligned} \tag{3}$$

这里

$$B_1\big([u_h^n, v_h], [p_h^n, q_h] \big) = \Big(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau^n}, v_h \Big) + (\nu \nabla u_h^n, \nabla v_h) - (p_h^n, \nabla \cdot v_h) + (q_h, \nabla \cdot u_h^n).$$

众所周知，当我们采用低阶等次有限元对 P1P1 (或 Q1Q1) 求解问题 (3) 时，得到的解是不稳定的。许多学者相继提出了多种稳定化方法[9-12]。下面我们就考虑用变分多尺度方法来求解问题 (1)，以达到稳定化的目的，使其得到稳定解。

3 求解非定常 Navier-Stokes 方程的变分多尺度方法

利用原问题的离散变分形式求解稳定的数值解时，变分多尺度方法是一种常见的稳定化方法。变分多尺度方法一般可以通过两个步骤来完成。

步骤 1 把原问题的数值解分成两个部分，粗尺度部分与细尺度部分，相应的检验函数也分成了两个部分，然后把检验函数的两个尺度部分分别代入到原问题的离散变分形式中，这样原问题的离散变分问题化成了两个问题，粗尺度问题与细尺度问题；

步骤 2 从步骤 1 中的细尺度问题中求得数值解的细尺度部分与粗尺度部分的关系，然后把这一关系代入到粗尺度问题中，从而使问题得到了解决。

类似于文献 [7] 中的方法，假设细尺度部分关于时间 t 是分片常数，我们可以得到原问题 (1) 的变分多尺度方法，对任意的 $(v_h, q_h) \in V_h^n \times Q_h^n$，求 $(u_h^n, p_h^n) \in V_h^n \times Q_h^n$ 使得

$$\begin{aligned} & \Big(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau^n}, v_h \Big) + B_2\big([u_h^n, p_h^n], [v_h, q_h] \big) + b(u_h^n, u_h^{n-1}, v_h) + b(u_h^{n-1}, u_h^n, v_h) \\ = & \sum_{K \in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu} \Big(f^n + \frac{u_h^{n-1}}{\tau^n}, \nabla q_h \Big)_K + (f^n, v_h) + b(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, v_h), \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} B_2\big([u_h^n, p_h^n], [v_h, q_h] \big) \; = \; & \nu(\nabla u_h^n, \nabla v_h) - (p_h^n, \nabla \cdot v_h) \\ & + \sum_{K \in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu} \Big(\frac{u_h^n}{\tau^n} + \nabla p_h^n, \nabla q_h \Big)_K + (q_h, \nabla \cdot u_h^n) \\ & + \sum_{E \subset \varepsilon_h^n} \frac{h_E}{12\nu} \big([\nu \partial_n u_h^n]_E, [\nu \partial_n v_h]_E \big)_E \, . \end{aligned}$$

3.1 稳定性分析

定义如下范数

$$|||\, u_h^n \,|||_h^2 = \nu |u_h^n|_1^2 + \sum_{E\subset\epsilon_h^n} \frac{h_E}{12\nu} \big\| [\nu\partial_n u_h^n]_E \big\|_E^2, \quad \|p_h^n\|_h^2 = \sum_{K\in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu} |p_h^n|_{1,K}^2,$$

我们得到下面的结论。

定理 1　设 (V_h^n, Q_h^n) 定义如上，对任意的 $(u_h^n, p_h^n) \in V_h^n \times Q_h^n$，$(u^n, p^n), (v, q) \in V \times Q$，存在与 h 无关的常数 c 和 β，使得当 $h \le c\tau^n$ 时，有下列式子成立

$$B_2\big([u_h^n, p_h^n], [u_h^n, p_h^n] \big) = |||\, u_h^n \,|||_h^2 + \|p_h^n\|_h^2 + \sum_{K\in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu} \Big(\frac{u_h^n}{\tau^n}, \nabla p_h^n \Big)_K, \tag{5}$$

$$\big| B_2([u^n, p^n], [v, q]) \big| \le c\big(|u^n|_1 + \|p^n\| \big)\big(|v|_1 + \|q\| \big), \tag{6}$$

$$0 < \beta\big(|u_h^n|_1 + \|p_h^n\| \big) \le \sup_{(v_h, q_h)\in V_h^n \times Q_h^n} \frac{B_2([u_h^n, p_h^n], [v_h, q_h])}{|v_h|_1 + \|q_h\|}. \tag{7}$$

证明　由 B_2 的定义可知 (5) 式成立。另外，我们有局部迹定理，存在与 h 无关的常数 $c > 0$，使得

$$\|v\|_E^2 \le c_2\Big(\frac{1}{h_K} \|v\|_k^2 + h_K |v|_{1,K}^2 \Big), \quad \forall\, v \in \big[H^1(K) \big]^2, \tag{8}$$

由 Schwarz 不等式知

$$\frac{h_E}{12\nu} \big([\nu\partial_n u^n]_E, [\nu\partial_n v]_E \big)_E \le \frac{h_E}{12\nu} \big\| [\nu\partial_n u^n]_E \big\|_E \big\| [\nu\partial_n v]_E \big\|_E,$$

而由逆不等式与 (8) 式知

$$\begin{aligned} \frac{h_E}{12\nu} \big\| [\nu\partial_n u^n] \big\|_E^2 &\le \frac{ch_E}{12\nu} \big(h_K^{-1} \|\nu\nabla u^n \cdot n\|_K^2 + h_K |\nu\nabla u^n \cdot n|_{1,K}^2 \big) \\ &\le \frac{c\nu h_E}{12h_K} |u^n|_{1,K}^2 + \frac{c\nu h_E}{12h_K} |u^n|_{1,K}^2 \le \frac{c\nu}{12} |u^n|_{1,K}^2, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{h_E}{12\nu} \big([\nu\partial_n u^n]_E, [\nu\partial_n v]_E \big)_E \le c|u^n|_{1,K} |v|_{1,K}.$$

由于 $h \le c\tau^n$，由 Schwarz 不等式及 $\|u_h^n\| \le c|u_h^n|_1$ 知

$$\frac{h_K^2}{8\nu} \Big(\frac{u^n}{\tau^n}, \nabla q \Big)_K \le \frac{h_K^2}{8\nu} \Big\| \frac{u^n}{\tau^n} \Big\|_K |q|_{1,K} \le \frac{h_K}{8\nu\tau^n} \|u^n\|_K \|q\|_K \le c|u^n|_{1,K} \|q\|_K,$$

所以

$$\begin{aligned} \big| B_2([u^n, p^n], [v, q]) \big| &= \nu(\nabla u^n, \nabla v) - (p^n, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u_h^n) + \sum_{K\in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu} \Big(\frac{u^n}{\tau^n} + \nabla p^n, \nabla q \Big)_K \\ &\le \nu|u^n|_1 |v|_1 + \|p^n\| |v|_1 + \|q\| |u^n|_1 + \sum_{K\in T_h^n} c\big(|u^n|_{1,K} \|q\|_K + \|p^n\|_K \|q\|_K \big) \\ &\le c\big(|u^n|_1 + \|p^n\| \big)\big(|v|_1 + \|q\| \big), \end{aligned}$$

即 (6) 式得证。

最后，我们证明 (7) 式成立。我们的目的是寻找一对 (v_h, q_h)，使得

$$B_2\big([u_h^n, p_h^n], [v_h, q_h]\big) \geq c\big(|u_h^n|_1 + \|p_h^n\|\big)\big(|v_h|_1 + \|q_h\|\big).$$

首先，我们令 $(v_h, q_h) = (-w, 0)$ (w 待定)，利用 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}
B_2\big([u_h^n, p_h^n], [-w, 0]\big) &= -\nu(\nabla u_h^n, \nabla w) + (p_h^n, \nabla\cdot w) - \sum_{E\subset\epsilon_h^n} \frac{h_E}{12\nu}\big([\nu\partial_n u_h^n]_E, [\nu\partial_n w]_E\big)_E \\
&\geq -\nu|u_h^n|_1|w|_1 - \sum_{E\subset\epsilon_h^n} \frac{h_E}{12\nu}\|[\nu\partial_n u_h^n]\|_E \|[\nu\partial_n w]\|_E + (p_h^n, \nabla\cdot w) \\
&\geq -\Big(\nu|u_h^n|_1^2 + \sum_{E\subset\epsilon_h^n} \frac{h_E}{12\nu}\|[\nu\partial_n u_h^n]\|_E^2\Big)^{\frac12}\Big(\nu|w|_1^2 + \sum_{E\subset\epsilon_h^n} \frac{h_E}{12\nu}\|[\nu\partial_n w]\|_E^2\Big)^{\frac12} \\
&\quad +(p_h^n, \nabla\cdot w) \\
&\geq (p_h^n, \nabla\cdot w) - |||\, u_h^n \,|||_h \Big(\nu|w|_1^2 + \sum_{E\in\epsilon_h^n} \frac{h_E}{12\nu}\|[\nu\partial_n w]\|_E^2\Big)^{\frac12}.
\end{aligned} \tag{9}$$

由 (2) 式知，对任意的 $p_h^n \in Q_h^n$，存在 $w \in V$ 使得 $|w|_1 = \|p_h^n\|$，且 $(\nabla\cdot w, p_h^n) \geq c|w|_1\|p_h^n\|$。于是，由上式及 (8) 式与 (9) 式，我们有

$$\begin{aligned}
B_2\big([u_h^n, p_h^n], [-w, 0]\big) &\geq -\sqrt{c\nu}\, |||\, u_h^n \,|||_h\, |w|_1 + c|w|_1\|p_h^n\| \\
&\geq -c\nu\gamma_1^{-1}\, |||\, u_h^n \,|||_h^2 + (c-\gamma_1)\|p_h^n\|^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

其中 γ_1 充分小 (待定)。我们取 $(v_h, q_h) = (u_h^n - \delta w, p_h^n)$，$\delta \in \mathbf{R}^2$ (待定)，由 (5) 式与 (10) 式知

$$\begin{aligned}
&B_2\big([u_h^n, p_h^n], [v_h, q_h]\big) \\
&= B_2\big([u_h^n, p_h^n], [u_h^n, p_h^n]\big) + \delta B_2\big([u_h^n, p_h^n], [-w, 0]\big) \\
&\geq (1-\delta c\nu\gamma_1^{-1})\, |||\, u_h^n \,|||_h^2 + \delta(c-\gamma_1)\|p_h^n\|^2 + \|p_h^n\|_h^2 + \sum_{K\in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u_h^n}{\tau^n}, \nabla p_h^n\Big)_K \\
&\geq \nu(1-\delta c\nu\gamma_1^{-1})|u_h^n|_1^2 + \delta(c-\gamma_1)\|p_h^n\|^2 + \sum_{K\in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu}|p_h^n|_{1,K}^2 + \sum_{K\in T_h^n} \frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u_h^n}{\tau^n}, \nabla p_h^n\Big)_K.
\end{aligned} \tag{11}$$

另一方面，由 Cauchy 不等式知

$$\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u_h^n}{\tau^n}, \nabla p_h^n\Big)_K \geq -\frac{h_K^2}{16\nu(\tau^n)^2}\|u_h^n\|_K^2 - \frac{h_K^2}{16\nu}|p_h^n|_{1,K}^2.$$

由于 $\|u_h^n\| \leq c|u_h^n|_1$，则

$$\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u_h^n}{\tau^n}, \nabla p_h^n\Big) \geq -\frac{c}{16\nu}|u_h^n|_{1,K}^2 - \frac{h_K^2}{16\nu}|p_h^n|_{1,K}^2.$$

由 (11) 式知，只须 $0 < \gamma_1 < c$，$0 < \delta < \frac{\gamma_1|16\nu^2 - c|}{16c\nu^3}$，有

$$B_2\big([u_h^n, p_h^n], [v_h, q_h]\big) \geq \nu\Big(1 - \delta c\nu\gamma_1^{-1} - \frac{c}{16\nu^2}\Big)|u_h^n|_1^2 + \delta(c-\gamma_1)\|p_h^n\|^2,$$

我们取

$$c(\nu)=\min\Big\{\frac{\nu}{2}\Big(1-\delta c\nu\gamma_1^{-1}-\frac{c}{16\nu^2}\Big),\frac{1}{2}\delta(c-\gamma_1)\Big\},\quad c(\delta)=1+\delta,$$

则

$$B_2\big([u_h^n,p_h^n],[v_h,q_h]\big)\geq c(\nu)\big(|u_h^n|_1^2+\|p_h^n\|^2\big).$$

另外，由于

$$|v_h|_1+\|q_h\|\leq|u_h^n|_1+\|p_h^n\|+\delta|w|_1\leq|u_h^n|_1+(1+\delta)\|p_h^n\|\leq c(\delta)\big(|u_h^n|_1+\|p_h^n\|\big),$$

取 $\beta=\frac{c(\nu)}{2c(\delta)}$，则 (7) 式得证。 **证毕**

4 自适应算法

在文献 [4-6] 中，作者已经指出数值解的离散误差主要有两个来源，一个是空间离散产生的误差，一个是时间离散产生的误差。为了较好的控制这两个误差来源，我们采用下面两种误差估计子，并结合自适应算法，这样使我们的问题得到了较好的解决。

4.1 空间自适应

从前面的分析过程来看，我们发现空间离散误差主要来源于细尺度部分，也就是说 u_f 是主要的误差来源。另外，考虑到不可压缩性，我们引进下面空间局部的误差估计子

$$\begin{aligned}\eta_K^n=&\Big[\frac{h_K^2}{8\nu}\Big\|f_h^n-\nabla p_h^n-\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}\Big\|_K^2\\&+\sum_{E\subset\partial K}\frac{h_E}{24\nu}\big\|[\nu\partial_n u_h^n]_E\big\|_E^2+\nu\big\|\nabla\cdot u_h^n\big\|_K^2\Big]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 f_h^n 是 f^n 的分片常数逼近。我们定义 $\xi^n=\sqrt{\nu|u_h^n|_1^2+\|p_h^n\|^2}$。为了在每个时间段上得到合适的网格剖分，我们采用均衡误差估计子的方法，即要求在每个单元上，都有下面的不等式成立

$$\frac{(1-\alpha_1)^2\beta_1^2(\xi^n)^2}{N_K}\leq(\eta_K^n)^2,\tag{12}$$

$$(\eta_K^n)^2\leq\frac{(1+\alpha_1)^2\beta_1^2(\xi^n)^2}{N_K},\tag{13}$$

其中 α_1,β_1 是给定的常数，N_K 是网格剖分的单元总数，且 $\alpha_1\in(0,1]$，称 β_1 为空间上的容忍误差。当某个时间段固定时，在每个单元上，我们要求 (12) 式与 (13) 式同时成立。若 $(\eta_K^n)^2$ 比 (12) 式左端的下确界小时，我们需要放松网格，相反，若 $(\eta_K^n)^2$ 比 (13) 式右端的上确界大时，我们加密网格。经过加密或放松网格后，我们在新的网格上求解问题 (4)，如此反复下去，直到在每个单元上 (12) 式与 (13) 式都成立。

注 当 β_1 减小时，网格剖分的单元总数增加，同时空间上解得精度也会提高。α_1 是用来得到 (η_K^n) 的上、下界的变量，当 $\alpha_1=1$ 时，(η_K^n) 无下界，网格剖分不会出现放松的情形。α_1,β_1 取值不同会导致计算结果的不同，在这里我们不考虑这种影响情况。

4.2 时间自适应

根据文献 [5] 中的分析结果，我们采用以下时间局部的误差估计子

$$\eta_\nabla^n=\sqrt{\nu\tau^n|u_h^n-u_h^{n-1}|_1^2}.$$

同样，引进变量 $\sigma^n = \sqrt{\nu\tau^n|u_h^n|_1^2}$，在每一时间段上，我们要求下列不等式成立

$$(1-\alpha_2)\beta_2 \le \frac{\eta_\nabla^n}{\sigma^n} \le (1+\alpha_2)\beta_2, \tag{14}$$

其中 α_2, β_2 是给定的常数，且 $\alpha_2 \in (0,1]$，β_2 为空间上的容忍误差。若当前的时间步长满足 (14) 式，我们将进行下一个时间步的计算，否则，根据 (14) 式，我们需要增加或缩小时间步长，直到在该时间段上 (14) 式成立。我们同样也不讨论 α_2, β_2 取不同的值对计算结果的影响情况。

5 整体误差估计子与实际误差的等价性证明

当 $1 \le n \le N$ 时，我们定义下列变量

$$e_1^n = \sum_{K\in T_h^n} |u^n - u_h^n|_{1,K}^2, \quad e_2^n = \sum_{K\in T_h^n} \|p^n - p_h^n\|_K^2,$$

$$\eta^n = \sqrt{\sum_{K\in T_h^n} (\eta_K^n)^2}\ , \quad e_3^n = \sqrt{\tau^n(e_1^n + e_2^n)}\ ,$$

并定义整体误差估计子 H^n 与实际误差 e^n

$$H^n = \sqrt{\sum_{m=1}^n \big(\tau^m(\eta^m)^2 + (\eta_\nabla^m)^2\big)}\ , \quad e^n = \sqrt{\sum_{m=1}^n (e_3^m)^2}\ .$$

我们有下面的结论成立。

定理2 设 $(u_h^n, p_h^n) \in V_h^n \times Q_h^n$ 是问题 (4) 的解，则

$$\begin{aligned} H^n \le c\Big\{ \Big[\sum_{m=1}^n \tau^m \sum_{K\in T_h^m} h_K^2\Big(\|f^m - f_h^m\|_K^2 + |u^m|_{1,K}^2 |u^m|_{2,K}^2 \\ + \Big\|\frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\tau^m} - \partial_t u|_{t=t^m}\Big\|_K^2\Big)\Big] + (e^n)^2 + \sum_{m=1}^n \tau^m |u^m - u^{m-1}|_1^2\Big\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} e^n \le c\Big\{(H^n)^2 + \sum_{m=1}^n \tau^m \sum_{K\in T_h^m} \Big[\Big\|\frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\tau^m} - \partial_t u|_{t=t^m}\Big\|_K^2 + h_K^2\|f^m - f_h^m\|_K^2\Big] \\ + \sum_{m=1}^n \tau^m \big[\,|u^m|_1^2|u^m|_2^2 + h^{-2}\big(\,|u_h^m|_1^2|u_h^{m-1}|_1^2 + |u_h^{m-1}|_1^4\,\big)\big]\Big\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{16}$$

证明 令

$$\varphi_{E_{ij}} = \lambda_{K_i}\lambda_{K_j} \Big/ \int_{E_{ij}} \lambda_{K_i}\lambda_{K_j}, \quad q_K = \nabla\cdot u_h^m,$$

$$\begin{aligned} w_K = \sum_{E\subset\partial K} \frac{h_E}{24\nu}\varphi_E[\nu\partial_n u_h^m]_E \\ - a(x)\Big\{\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(f_h^m - \nabla p_h^m - \frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\tau^m}\Big)_K + \sum_{E\subset\partial K}\frac{h_E}{24\nu}[\nu\partial_n u_h^m]_E\varphi_E\Big\}, \end{aligned}$$

这里，$\lambda_{K_1}, \lambda_{K_2}, \lambda_{K_3}$ 是单元 K 的重心坐标，函数 $a(x)$ 定义如下

$$a(x)=\begin{cases}1, & x\in K,\\ 0, & x\in\partial K.\end{cases}$$

从而我们得到

$$\int_K w_K=-\frac{h_K^2}{8\nu}\int_K\Big(f_h^m-\nabla p_h^m-\frac{u_h^m-u_h^{m-1}}{\tau^m}\Big)_K,$$

$$\int_E w_K=\frac{h_E}{24\nu}[\nu\partial_n u_h^m]_E,\quad w_K|_K=-\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(f_h^m-\nabla p_h^m-\frac{u_h^m-u_h^{m-1}}{\tau^m}\Big)_K,$$

以及

$$\begin{aligned}(\eta_K^m)^2\ =\ &\frac{h_K^2}{8\nu}\Big\|f_h^m-\nabla p_h^m-\frac{u_h^m-u_h^{m-1}}{\tau^m}\Big\|_K^2+\sum_{E\subset\partial K}\frac{h_E}{24\nu}\big\|[\nu\partial_n u_h^m]_E\big\|_E^2+\nu\|\nabla\cdot u_h^m\|_K^2\\ =\ &\Big(\frac{u_h^m-u_h^{m-1}}{\tau^m},w_K\Big)_K-(\nu\nabla\varepsilon_1^m,\nabla w_K)_K+(\varepsilon_2^m,\nabla\cdot w_K)_K-(\nu\nabla\cdot\varepsilon_1^m,q_K)_K\\ &+(f^m-f_h^m,w_K)_K-(\partial_t u|_{t=t^m},w_K)_K-((u^m\cdot\nabla)u^m,w_K)_K.\end{aligned}$$

由 b 的性质知

$$-\big((u^m\cdot\nabla)u^m,w_K\big)_K\le c|u^m|_{1,K}|u^m|_{2,K}\|w_K\|_K,$$

所以

$$\begin{aligned}(\eta_K^m)^2\le c\Big[&\big(|\varepsilon_1^m|_{1,K}+\|\varepsilon_2^m\|_K\big)\big(|w_K|_{1,K}+\|q_K\|_K\big)\\ &+\Big(\|f^m-f_h^m\|_K+\Big\|\frac{u_h^m-u_h^{m-1}}{\tau^m}-\partial_t u|_{t=t^m}\Big\|_K+|u^m|_{1,K}^2|u^m|_{2,K}^2\Big)\|w_K\|_K\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{K\in T_h^m}\tau^m(\eta_K^m)^2\le c\Big[&(e_3^m)^2+\tau^m\sum_{K\in T_h^m}h_K^2\Big(\|f^m-f_h^m\|_K^2\\ &+|u^m|_{1,K}^2|u^m|_{2,K}^2+\Big\|\frac{u_h^m-u_h^{m-1}}{\tau^m}-\partial_t u|_{t=t^m}\Big\|_K^2\Big)\Big].\end{aligned}$$

另外

$$(\eta_\nabla^m)^2=\nu\tau^m|u_h^m-u_h^{m-1}|_1^2\le c\big[(e_3^m)^2+\tau^m|u^m-u^{m-1}|_1^2\big],$$

所以

$$\begin{aligned}(H^n)^2\ \le\ c\Big[&\sum_{m=1}^n\tau^m\sum_{K\in T_h^m}h_K^2\Big(\|f^m-f_h^m\|_K^2+|u^m|_{1,K}^2|u^m|_{2,K}^2\\ &+\Big\|\frac{u_h^m-u_h^{m-1}}{\tau^m}-\partial_t u|_{t=t^m}\Big\|_K^2\Big)+(e^n)^2+\sum_{m=1}^n\tau^m|u^m-u^{m-1}|_1^2\Big],\end{aligned}$$

即 (15) 式成立。

为了证明 (16) 式成立，我们有

$$
\begin{aligned}
B_0\big([u^n,p^n],[v,q]\big) &= (\nu\nabla u^n,\nabla v)-(p^n,\nabla\cdot v)+(q,\nabla\cdot u^n)\\
&= (f^n,v)-(\partial_t u|_{t=t^n},v)-\big((u^n\cdot\nabla)u^n,v\big),
\end{aligned}
$$

且由 (4) 式知

$$
\begin{aligned}
B_2\big([u_h^n,p_h^n],[v_h,q_h]\big) &= \nu(\nabla u_h^n,\nabla v_h)-(p_h^n,\nabla\cdot v_h)+(q_h,\nabla\cdot u_h^n)\\
&\quad+\sum_{K\in T_h^n}\Big\{\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u_h^n}{\tau^n}+\nabla p_h^n,\nabla q_h\Big)_K+\sum_{E\subset\partial K}\frac{h_E}{24\nu}\big([\nu\partial_n u_h^n]_E,[\nu\partial_n v_h]_E\big)_E\Big\}\\
&= (f^n,v_h)+\sum_{K\in T_h^n}\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(f^n+\frac{u_h^{n-1}}{\tau^n},\nabla q_h\Big)_K-\Big(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n},v_h\Big)\\
&\quad-b(u_h^{n-1},u_h^n,v_h)-b(u_h^{n-1},u_h^{n-1},v_h)-b(u_h^n,u_h^{n-1},v_h),
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&B_2\big([\varepsilon_1^n,\varepsilon_2^n],[v_h,q_h]\big)\\
=\;&\nu(\nabla\varepsilon_1^n,\nabla v_h)-(\varepsilon_2^n,\nabla\cdot v_h)+(q_h,\nabla\cdot\varepsilon_1^n)\\
&-\sum_{K\in T_h^n}\Big\{\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u_h^n}{\tau^n}+\nabla p_h^n,\nabla q_h\Big)_K+\sum_{E\subset\partial K}\frac{h_E}{24\nu}\big([\nu\partial_n u_h^n]_E,[\nu\partial_n v_h]_E\big)_E\Big\}\\
&+\sum_{K\in T_h^n}\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u^n}{\tau^n}+\nabla p^n,\nabla q_h\Big)_K\\
=\;&\Big(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\partial_t u|_{t=t^n},v_h\Big)-\sum_{K\in T_h^n}\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(f^n+\frac{u_h^{n-1}}{\tau^n},\nabla q_h\Big)_K-b(u_h^{n-1},u_h^{n-1},v_h)\\
&+\sum_{K\in T_h^n}\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u^n}{\tau^n}+\nabla p^n,\nabla q_h\Big)_K-b(u^n,u^n,v_h)+b(u_h^n,u_h^{n-1},v_h)+b(u_h^{n-1},u_h^n,v_h),
\end{aligned}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
&B_0\big([\varepsilon_1^n,\varepsilon_2^n],[v,q]\big)\\
=\;&B_0\big([\varepsilon_1^n,\varepsilon_2^n],[v,q]\big)-B_2\big([\varepsilon_1^n,\varepsilon_2^n],[v_h,q_h]\big)+\Big(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\partial_t u|_{t=t^n},v_h\Big)\\
&-\sum_{K\in T_h^n}\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(f^n+\frac{u_h^{n-1}}{\tau^n},\nabla q_h\Big)_K+b(u_h^{n-1},u_h^n,v_h)-b(u_h^{n-1},u_h^{n-1},v_h)\\
&+\sum_{K\in T_h^n}\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(\frac{u^n}{\tau^n}+\nabla p^n,\nabla q_h\Big)_K-b(u^n,u^n,v_h)+b(u_h^n,u_h^{n-1},v_h)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{K\in T_h^n}\Big\{\big(-\nu\triangle u^n+\nabla p^n+(u^n\cdot\nabla)u^n, v-v_h\big)_K+(\nu\triangle u_h^n-\nabla p_h^n, v-v_h)_K$$

$$-\Big(\partial_t u|_{t=t^n}-\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}, v_h\Big)_K-\frac{1}{2}\sum_{E\subset\partial K}\big([\nu\partial_n u_h^n]_E, v-v_h\big)_E\Big\}+b(u_h^{n-1},u_h^n,v_h)$$

$$-\sum_{K\in T_h^n}\Big\{\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(f^n-\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\nabla p_h^n,\nabla q_h\Big)_K-\sum_{E\subset\partial K}\frac{h_E}{24\nu}\big([\nu\partial_n u_h^n]_E,[\nu\partial_n v_h]_E\big)_E\Big\}$$

$$-b(u^n,u^n,v)+b(u_h^n,u_h^{n-1},v_h)-b(u_h^{n-1},u_h^{n-1},v_h)-(q-q_h,\nabla\cdot u_h^n)_K$$

$$=-\sum_{K\in T_h^n}\Big\{\frac{h_K^2}{8\nu}\Big(f^n-\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\nabla p_h^n,\nabla q_h\Big)_K-\sum_{E\subset\partial K}\frac{h_E}{24\nu}\big([\nu\partial_n u_h^n]_E,[\nu\partial_n v_h]_E\big)_E\Big\}$$

$$+\sum_{K\in T_h^n}\Big\{\Big(f_h^n-\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\nabla p_h^n, v-v_h\Big)_K+(f^n-f_h^n, v-v_h)_K$$

$$-\Big(\partial_t u|_{t=t^n}-\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}, v\Big)_K-(q-q_h,\nabla\cdot u_h^n)_K-\frac{1}{2}\sum_{E\subset\partial K}\big([\nu\partial_n u_h^n]_E, v-v_h\big)_E\Big\}$$

$$-b(u^n,u^n,v)+b(u_h^n,u_h^{n-1},v_h)+b(u_h^{n-1},u_h^n,v_h)-b(u_h^{n-1},u_h^{n-1},v_h).$$

取 $v_h=I_hv$，$q_h=\Pi_hq$，由 Schwarz 不等式与逆不等式及庞加莱不等式知

$$\|v_h\|\le c(h+1)|v|_1,$$

而

$$|b(u_h^n,u_h^{n-1},v_h)|\le c|u_h^n|_1|u_h^{n-1}|_1|v_h|_1,$$

$$|v_h|_1\le ch^{-1}\|v_h\|\le ch^{-1}(h+1)|v|_1\le ch^{-1}|v|_1,$$

所以

$$|b(u_h^n,u_h^{n-1},v_h)|\le ch^{-1}|u_h^n|_1|u_h^{n-1}|_1|v|_1.$$

同理

$$|b(u_h^{n-1},u_h^n,v_h)|\le ch^{-1}|u_h^n|_1|u_h^{n-1}|_1|v|_1,$$

$$|b(u_h^{n-1},u_h^{n-1},v_h)|\le ch^{-1}|u_h^{n-1}|_1|u_h^{n-1}|_1|v|_1,$$

则

$$B_0\big([\varepsilon_1^n,\varepsilon_2^n],[v,q]\big)\le c\Big\{\sum_{K\in T_h^n}\Big[(\eta_K^n)^2+h_K^2\|f^n-f_h^n\|_K^2+\Big\|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\partial_t u|_{t=t^n}\Big\|_K^2\Big]$$

$$+|u^n|_1^2|u^n|_2^2+h^{-2}\big(|u_h^n|_1^2|u_h^{n-1}|_1^2+|u_h^{n-1}|_1^4\big)\Big\}^{1/2}\big(|v|_1+\|q\|\big).$$

而 $B_0([\varepsilon_1^n,\varepsilon_2^n],[v,q])$ 满足 inf-sup 条件 (2)，则

$$|\varepsilon_1^n|_1^2+\|\varepsilon_2^n\|^2\le c\sum_{K\in T_h^n}\Big[(\eta_K^n)^2+h_K^2\|f^n-f_h^n\|_K^2+\Big\|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\partial_t u|_{t=t^n}\Big\|_K^2\Big]$$

$$+|u^n|_1^2|u^n|_2^2+h^{-2}\big(|u_h^n|_1^2|u_h^{n-1}|_1^2+|u_h^{n-1}|_1^4\big),$$

$$\tau^n\big(|\varepsilon_1^n|_1^2+\|\varepsilon_2^n\|^2\big)\le c\tau^n\Big\{\sum_{K\in T_h^n}\Big[(\eta_K^n)^2+h_K^2\|f^n-f_h^n\|_K^2+\Big\|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\tau^n}-\partial_t u|_{t=t^n}\Big\|_K^2\Big]$$

$$+|u^n|_1^2|u^n|_2^2+h^{-2}\big(|u_h^n|_1^2|u_h^{n-1}|_1^2+|u_h^{n-1}|_1^4\big)\Big\},$$

上述不等式左右两端关于 n 求和，即得 (16) 式成立。 **证毕**

6 数值算例

我们将通过方腔流问题的数值试验来验证本文提出的自适应变分多尺度方法的有效性。令 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0.5$, $\beta_1=\beta_2=0.02$，即我们只考虑空间上加密，时间步长增大或缩小的情况。我们取区域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$，外力 $f=0$，在区域的上边界上 $u_1=1$, $u_2=0$，在其它的边界上取 $u_1=0$, $u_2=0$。

结合自适应算法，本文给出了 $Re=1000$ 下 $t=50s$ 时的数值模拟结果，如图 1 至图 2 所示。从图 1 我们发现，区域中产生了大涡，同时区域的左、右下方拐角处也出现了小涡。这些数值结果与文献 [12] 中的结果是一致的。图 3 与图 4 表示了 $Re=1000$ 时两个不同时刻的网格剖分情况，从中我们可以看出，随着时间的推移，区域顶端左、右两个拐角处网格剖分逐渐加密。图 5 表示 $Re=1000$ 时的时间步长变化情况，体现了自适应算法的过程。

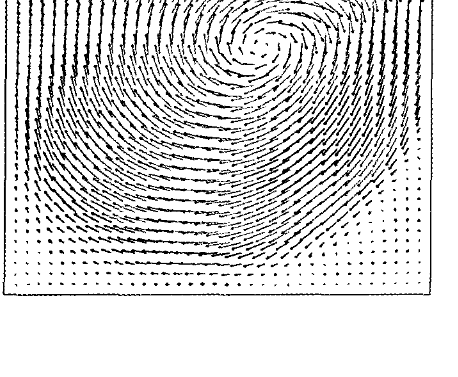

图 1:　$Re=1000$, $t=50s$ 速度向量图

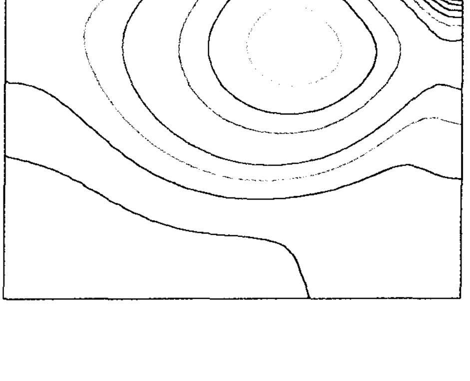

图 2:　$Re=1000$, $t=50s$ 压力等高线图

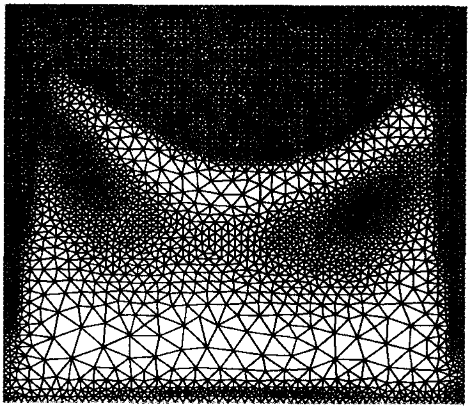

图 3:　$Re = 1000,\ t = 1s$ 网格剖分情况

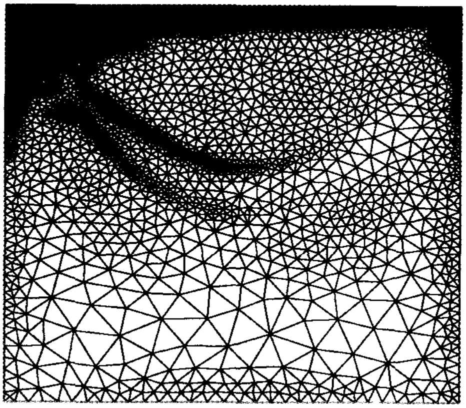

图 4:　$Re = 1000,\ t = 50s$ 网格剖分情况

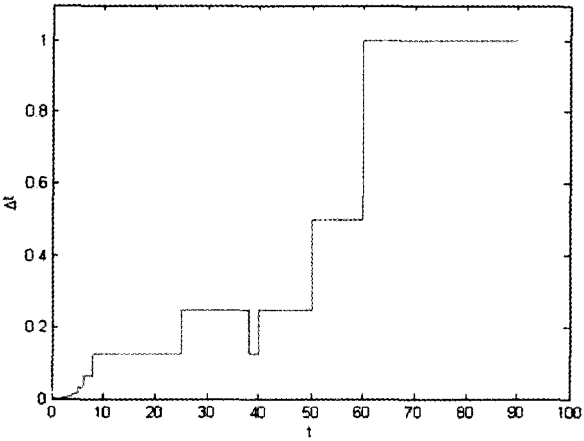

图 5:　$Re = 1000$ 时间步长变化情况

参考文献：

[1] Babuska I, Rheinboldt W C. Error estimates for adaptive finite element method[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15(4): 736-754

[2] Verfurth R. A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques[M]. New York: Wiley, 1996

[3] Berrone S. Adaptive discretization of stationary and incompressible Navier-Stokes equations by stabilized finite element methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190: 4435-4455

[4] Verfurth R, Bernardi C. A posteriori error analysis of the fully discretized time dependent Stokes equations[J]. Esaim-Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modelisation Mathematique et Analysis Numerique, 2004, 38: 437-455

[5] Berrone S, Marro M. Space-time adaptive simulations for unsteady Navier-Stokes problems[J]. Computers & Fluids, 2009, 38: 1132-1144

[6] Bernardi C, Verfurth R. A posterior error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations[J]. M2AN, 2004, 38: 437-455

[7] Araya R, Barrenechea G, Valentin F. Stabilized finite element based on multiscale enrichment for the Stokes problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, 44: 322-348
[8] Verfurth R. A posterior error estimators for the Stokes equations[J]. Numerische Mathematik, 1989, 55: 309-325
[9] He Y. Two-level method based on finite element and Crank-Nicolson extrapolation for the time-dependent Navier-Stokes equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2003, 41(4): 1263-1285
[10] Douglas J, Wang J. A absolutely stabilized finite element methods for the Stokes problem[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1989, 52: 495-508
[11] Zheng H, Hou Y. A finite element variational multiscale method for incompressible flows based on two local Gauss integrations[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228: 5961-5977
[12] Liu Q, Hou Y. A two-level finite element method for the Navier-Stokes equations based on a new projection[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009: 1-17

Multiscale Adaptivity for the Time-dependent Navier-Stokes Equations

MU Bao-ying, HOU Yan-ren, ZHANG Yun-zhang

(Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: In this paper we present a stabilized finite element method for the time-dependent Navier-Stokes equations based on the variational multiscale theory. Using a posteriori error estimator which is equivalent to the actual error and combining with the adaptive algorithm, we obtain a multiscale adaptive method for the time-dependent Navier-Stokes Equations. This method is simple, intuitive, and easy to implement. The numerical experiment demonstrates the efficiency of the method.

Keywords: Navier-Stokes equations; variational multiscale method; a-posteriori error estimators; adaptive algorithm

Received: 21 Dec 2009. **Accepted:** 31 Dec 2009.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10871156); the Interdiscipline Funds of Xi'an Jiaotong University (2009xjtujc30).